

Uma refinaria de petróleo produz duas qualidades de gasolina, cujo galão é vendido respectivamente por 18 e 21 centavos. A refinaria pode comprar quatro tipos diferentes de produtos básicos, com as seguintes composições e preços.

PRODUTOS BÁSICOS	COMPONENTES			PREÇO POR GALÃO
	A	B	C	
1	0,80	0,10	0,10	0,14
2	0,30	0,30	0,40	0,10
3	0,70	0,10	0,20	0,15
4	0,40	0,50	0,10	0,12

A gasolina de 21 centavos deve ter pelo menos 60% de A e não mais de 35% de C. A gasolina de 18 centavos não pode ter mais de 30% de C. No processo de misturar a gasolina, 2% de A e 1 % de B e de C perdem-se por evaporação. Determinar as quantidades relativas dos produtos básicos que devem ser usadas a fim de minimizar o custo por galão.

RESOLUÇÃO:

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de produto 1 a ser usada na gasolina de 18 centavos

x_2 = quantidade de produto 2 a ser usada na gasolina de 18 centavos

x_3 = quantidade de produto 3 a ser usada na gasolina de 18 centavos

x_4 = quantidade de produto 4 a ser usada na gasolina de 18 centavos

x_5 = quantidade de produto 1 a ser usada na gasolina de 21 centavos

x_6 = quantidade de produto 2 a ser usada na gasolina de 21 centavos

x_7 = quantidade de produto 3 a ser usada na gasolina de 21 centavos

x_8 = quantidade de produto 4 a ser usada na gasolina de 21 centavos

Parâmetros:

PRODUTOS BÁSICOS	COMPONENTES			PREÇO POR GALÃO
	A	B	C	
1	0,80	0,10	0,10	0,14
2	0,30	0,30	0,40	0,10
3	0,70	0,10	0,20	0,15
4	0,40	0,50	0,10	0,12
Mínimo na Gas 21	0,60			
Máximo na Gas 21			0,35	
Máximo na Gas 18			0,30	
Evaporação	0,02	0,01	0,01	

Função Objetivo:

$$\min C = (x_1 + x_5) \cdot 0,14 + (x_2 + x_6) \cdot 0,10 + (x_3 + x_7) \cdot 0,15 + (x_4 + x_8) \cdot 0,12$$

Restrições:

Componente A para gasolina de 21c →

Caso não houvesse evaporação a restrição seria:

$$0,80x_5 + 0,30x_6 + 0,70x_7 + 0,40x_8 \geq 0,60.1$$

Mas como existe evaporação de 2% somente 98% desse total será efetivamente aproveitado, portanto:

Ou seja,

$$0,98 \times (0,80x_5 + 0,30x_6 + 0,70x_7 + 0,40x_8) \geq 0,60.1$$

$$0,80x_5 + 0,30x_6 + 0,70x_7 + 0,40x_8 \geq \frac{0,60}{0,98}$$

$$0,80x_5 + 0,30x_6 + 0,70x_7 + 0,40x_8 \geq 0,6122$$

Assim também para as restrições do componente C, para:

Componente C para gasolina de 21c →

$$0,99 \times (0,10x_5 + 0,40x_6 + 0,20x_7 + 0,10x_8) \leq 0,35.1$$

$$(0,10x_5 + 0,40x_6 + 0,20x_7 + 0,10x_8) \leq \frac{0,35}{0,99}$$

$$0,10x_5 + 0,40x_6 + 0,20x_7 + 0,10x_8 \leq 0,3535$$

Componente C para gasolina de 18c →

$$0,99 \times (0,10x_1 + 0,40x_2 + 0,20x_3 + 0,10x_4) \leq 0,30.1$$

$$(0,10x_1 + 0,40x_2 + 0,20x_3 + 0,10x_4) \leq \frac{0,30}{0,99}$$

$$0,10x_1 + 0,40x_2 + 0,20x_3 + 0,10x_4 \leq 0,3030$$

Também é necessário ser feito um ajuste nas quantidades totais, ou seja, como existe evaporação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ não será igual a 1. É preciso se colocar uma quantidade a mais e para isso precisamos calcular a taxa de evaporação de cada produto:

Produto	Componente A	Componente B	Componente C	Taxa de evaporação
1	0,8x0,02	0,1x0,01	0,1x0,01	0,018
2	0,3x0,02	0,3x0,01	0,4x0,01	0,013
3	0,7x0,02	0,1x0,01	0,2x0,01	0,017
4	0,4x0,02	0,5x0,01	0,1x0,01	0,014

Assim sendo temos:

$$\text{Gasolina de 18c} \rightarrow (1 - 0,018)x_1 + (1 - 0,013)x_2 + (1 - 0,017)x_3 + (1 - 0,014)x_4 = 1$$

Ou seja,

$$0,982x_1 + 0,987x_2 + 0,983x_3 + 0,986x_4 = 1$$

Gasolina de 21c →

$$(1 - 0,018)x_5 + (1 - 0,013)x_6 + (1 - 0,017)x_7 + (1 - 0,014)x_8 = 1$$

Ou seja,

$$0,982x_5 + 0,987x_6 + 0,983x_7 + 0,986x_8 = 1$$

Lógicas → x_1 até $x_8 \geq 0$

MODELO MATEMÁTICO

$$\min C = (x_1 + x_5) \cdot 0,14 + (x_2 + x_6) \cdot 0,10 + (x_3 + x_7) \cdot 0,15 + (x_4 + x_8) \cdot 0,12$$

Sujeito à:

$$\begin{cases} 0,80x_5 + 0,30x_6 + 0,70x_7 + 0,40x_8 \geq 0,6122 \\ 0,10x_5 + 0,40x_6 + 0,20x_7 + 0,10x_8 \leq 0,3535 \\ 0,10x_1 + 0,40x_2 + 0,20x_3 + 0,10x_4 \leq 0,3030 \\ 0,982x_1 + 0,987x_2 + 0,983x_3 + 0,986x_4 = 1 \\ 0,982x_5 + 0,987x_6 + 0,983x_7 + 0,986x_8 = 1 \\ x_1 \text{ até } x_8 \geq 0 \end{cases}$$

Dois dos produtos químicos produzidos pela Up Quimical são compostos pela mistura em proporções diferentes de dois componentes base, conforme tabela a seguir:

PRODUTOS	COMPONENTE	
	XYZ	WKZ
ABC	7 PARTES	5 PARTES
MNO	4 PARTES	8 PARTES

Esses produtos são adquiridos de fornecedores externos e a Up Quimical deseja programar a produção para o próximo mês. O Departamento Comercial pretendo vender 7000 litros do produto ABC e 3200 litros do produto MNO.

Por questões de mercado e financeiras deseja-se minimizar o custo dos produtos ABC e MNO, cujos componentes custam R\$ 400,00 (XYZ) e R\$ 200,00 (WKX) por litro. Devido aos contratos firmados a Up Quimical deve comprar pelo menos 200 litros do componente XYZ a cada compra. Modelar matematicamente a situação problema para determinar o programa de produção desta linha de produtos.

RESOLUÇÃO:

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de componente XYZ a ser usada no produto ABC

x_2 = quantidade de componente WKZ a ser usada no produto ABC

x_3 = quantidade de componente XYZ a ser usada no produto MNO

x_4 = quantidade de componente WKZ a ser usada no produto MNO

Parâmetros:

PRODUTOS	COMPONENTE		Vendas previstas
	XYZ	WKZ	
ABC	7 PARTES	5 PARTES	7000
MNO	4 PARTES	8 PARTES	3200
CUSTO	\$400,00	\$200,00	
AQUISIÇÃO MÍNIMA	200		

Função Objetivo:

$$\min C = (x_1 + x_3) \cdot 400 + (x_2 + x_4) \cdot 200$$

Restrições:

Vendas de ABC: $(x_1 + x_2) \geq 7000$

Vendas de MNO: $(x_3 + x_4) \geq 3200$

Aquisição mínima: $(x_1 + x_3) \geq 200$

Composição de ABC: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{7}{5} \rightarrow 5x_1 = 7x_2 \rightarrow 5x_1 - 7x_2 = 0$

Composição de MNO: $\frac{x_3}{x_4} = \frac{4}{8} \rightarrow 8x_3 = 4x_4 \rightarrow 8x_3 - 4x_4 = 0$

Lógicas: $x_1 \text{ até } x_4 \geq 0$

MODELO MATEMÁTICO

$$\min C = (x_1 + x_3) \cdot 400 + (x_2 + x_4) \cdot 200$$

Sujeito à:

$$(x_1 + x_2) \geq 7000$$

$$(x_3 + x_4) \geq 3200$$

$$(x_1 + x_3) \geq 200$$

$$5x_1 - 7x_2 = 0$$

$$8x_3 - 4x_4 = 0$$

$$x_1 \text{ até } x_4 \geq 0$$